

## Глава II

# РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ АНАЛИЗА ТЕХНИКИ ТЯЖЕЛОАТЛЕТИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ

### 2.1 Координаты точки, тела, системы тел

*Механическое движение тел* – это их перемещение в пространстве с течением времени. Соответственно, для определения механического состояния и его изменения необходимо, прежде всего, оперировать такими характеристиками, которые позволяют указать положение тела в пространстве и времени.

Пространственное положение объекта может быть определено только по отношению к другому телу. Основным способом задания положения объекта является метод координат. В этом случае с выбранным заранее телом отсчета связывается определенная система координат, задаваемая началом отсчета и осями координат. Для числового определения координат выбирается длина единичного отрезка вдоль каждой из осей.

В связи с тем, что при исследовании техники тяжелоатлетических упражнений обработка материалов оптической регистрации движений заключается в выполнении «промера» с последующим считыванием координат суставов, необходимо рассмотреть некоторый материал из аналитической геометрии по определению координат точки. Для простоты изложения остановимся на определении координат на плоскости. Следует описать процедуру определения не только декартовых (прямоугольных) координат, но и полярных координат. Данный факт обусловлен тем, что при описании движения связанной системы тел, которую представляет биомеханическая система, гораздо удобнее использовать именно полярную систему координат.

В прямоугольной системе координат положение точки на плоскости определяется параллельными (контравариантными) координатами (рисунок 2.1).

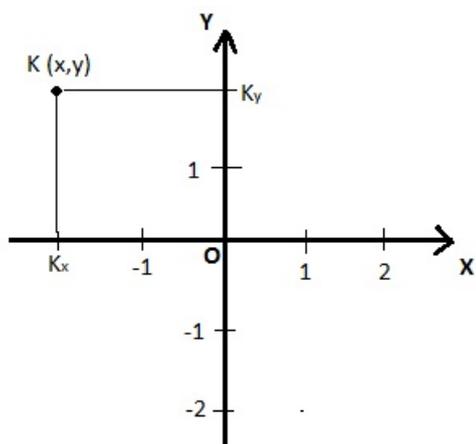


Рисунок 2.1 – Прямоугольные координаты точки на плоскости

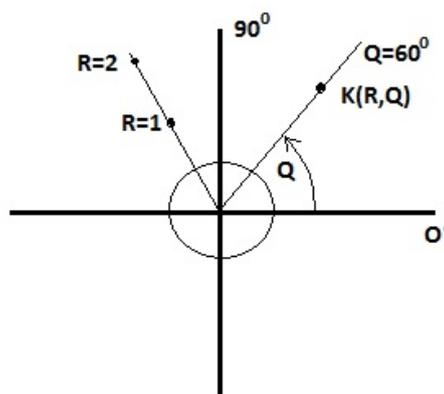


Рисунок 2.2 – Полярные координаты точки

Для точки  $K$  прямоугольными координатами будут являться длины проекций отрезка  $KO$  на координатные оси избранной системы координат. Знак координаты определяется номером квадранта, в котором расположена эта точка (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Знаки координат в зависимости от номера квадранта

N	X	Y
1	+	+
2	-	+
3	-	-
4	+	-

Итак, в прямоугольной системе координат каждой точке плоскости можно поставить в соответствие пару чисел – координаты этой точки относительно заданной координатной системы. Положение точки  $K$  с абсциссой  $K_x$  и ординатой  $K_y$  сокращенно записывается в виде  $K(x, y)$ .

Любое механическое движение можно представить как композицию двух видов движения – поступательного и вращательного. Причем движение тела спортсмена как движение многосвязного механизма всегда будет включать в себя вращательную компоненту. И если в поступательном движении любая прямая, связанная с движущимся объектом, остается параллельной самой себе, то вращательное движение характеризуется осью вращения и углом поворота относительно этой оси. Для характеристик угловых перемещений тела удобно пользоваться полярной системой коор-

динат (рисунок 2.2). В этом случае полярные координаты точки  $K$  определяются полярным радиусом  $R$  (или расстоянием от  $K$  до полюса  $O$ ) и полярным углом  $Q$  между полярной осью и лучом, соединяющим полюс с точкой  $K$ . Положение точки  $K$  в полярных координатах записывается в виде  $K(R, Q)$ . При отсчете полярного угла от полярной оси против движения часовой стрелки полярный угол считается положительным и отрицательным при отсчете в противоположном направлении. Итак, положение тела на плоскости в полярной системе координат определяется двумя числами – полярным углом и полярным радиусом [72; 75].

Укажем формулы, с помощью которых возможен переход от декартовых прямоугольных координат к полярным и наоборот. Пусть полярная ось полярной системы координат совпадает с осью абсцисс декартовой системы координат, а полюс – с началом декартовой системы. Тогда точка  $K$  в декартовой системе координат, имеющая в этих двух системах координаты  $K(R, Q)$  и  $K(x, y)$ , будет иметь в другой системе следующие координаты:

$$X = R \cos Q, \quad Y = R \sin Q. \quad (2.1)$$

В полярной системе координат обратный переход от декартовых к полярным координатам осуществляется следующими формулами:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, Q = \begin{cases} 90^\circ & \text{если } x = 0, y > 0; \\ 270^\circ & \text{если } x = 0, y \leq 0; \\ 180^\circ + \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x < 0; \\ 360^\circ + \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x > 0, y < 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x > 0, y > 0; \end{cases} \quad (2.2)$$

Формулы перехода от одной системы координат к другой весьма активно используются при обработке результатов оптической регистрации. Традиционно в качестве исходных координат считаются прямоугольные координаты суставов спортсмена. В дальнейшем необходимо рассчитать такие характеристики, как длина радиуса-вектора общего центра масс тела, величины и направления скорости его перемещения, вектора силы реакции связи в суставах и т. д.

Как отмечалось выше, для определения координат точки достаточно задать одну неподвижную систему координат. Для определения координат тела можно использовать два подхода:

1) определять координаты точек тела в заранее заданной неподвижной системе координат;

2) определять в неподвижной системе координат координаты только одной точки тела, а координаты других точек – относительно этой точки. В этом случае мы рассматриваем две системы координат: одну – неподвижную, другую – подвижную, связанную с заранее избранной точкой на теле.

Выбор способа задания координат определяется простотой нахождения данных координат. Необходимо указать правила перехода от одного способа определения координат в другой. Для простоты изложения рассмотрим случай плоскопараллельного движения, т. е. такое движение тела, при котором траектории всех его точек лежат в параллельных плоскостях. Пусть  $Oxy$  – неподвижная система координат, совпадающая с плоскостью движения тела, а  $Cx_1y_1$  – жестко связанная с телом подвижная система координат (рисунок 2.3).

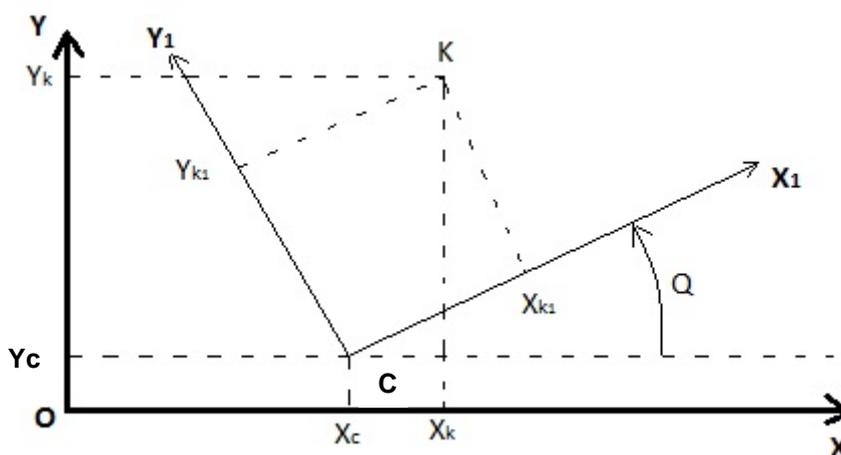


Рисунок 2.3 – Подвижная и неподвижная системы координат

Относительно неподвижной системы координат тело может совершать движение в следующих направлениях:

- *поступательном* вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ ;
- *вращательном* в плоскости  $Oxy$ .

Таким образом, свободное движение тела в плоскопараллельном движении имеет три степени свободы, и его положение на плоскости  $Oxy$  можно задать тремя координатами. За эти координаты можно принять две координаты: начало подвижной системы координат, которые обозначим через  $X_c$  и  $Y_c$ , и угол  $Q$ , образованный осями подвижной и неподвижной системы координат.

Рассмотрим на теле другую, отличную от  $C$ , точку  $K$ , координатами которой в системе  $Oxy$  будут значения  $X_k$  и  $Y_k$ , а в системе  $Cx_1y_1$ , связанной с телом, –  $X_{k_1}$  и  $Y_{k_1}$ .

Между координатами точки  $K$  в подвижной и неподвижной системах существуют следующие соотношения:

1. По известным координатам точки  $K$  в неподвижной системе координат определяются координаты этой же точки в подвижной системе

$$\begin{aligned} Y_{k_1} &= (Y_k - Y_c) \cos Q - (X_k - X_c) \sin Q, \\ X_{k_1} &= (Y_k - Y_c) \sin Q + (X_k - X_c) \cos Q. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2. По известным координатам точки  $K$  в подвижной системе координат определяются координаты этой точки в неподвижной системе

$$\begin{aligned} Y_k &= Y_c + Y_{k_1} \cos Q + X_{k_1} \sin Q, \\ X_k &= X_c - Y_{k_1} \sin Q + X_{k_1} \cos Q. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Формулы (2.3), (2.4) являются уравнениями преобразования плоских декартовых координат, которые называются в математике ортогональным преобразованием. В механике эти уравнения фактически определяют всю кинематику твердого тела, т. к. на их основе определяются и скорости, и ускорения точек тела.

Уравнения существенно упрощаются, если точку  $K$  расположить на оси абсцисс подвижной системы координат, предположим, на расстоянии  $L$  от ее начала. В этом случае формулы преобразований принимают следующий вид:

1. *Прямая зависимость*

$$Y_{k_1} = 0, \quad X_{k_1} = L. \quad (2.5)$$

2. *Обратная зависимость*

$$Y_k = Y_c + L \sin Q, \quad X_k = X_c + L \cos Q. \quad (2.6)$$

Если координаты начала подвижной системы координат и угол заданы в виде функций времени, то ортогональное преобразование определяет траекторию любого из возможных значений координат тела. В случае если на движение тела не наложено никаких ограничений, то оно называется свободным, например, движение тела, брошенного под углом к горизонту. При наложении же определенных ограничений на кинематику тела речь идет о связанных движениях. Например, при движении физического маятника траектория любой из его точек ограничена радиусом вращения, траектория движения точек биомеханической системы также ограничена длинами звеньев тела и анатомическими особенностями строения суставов.

Ограничения на свободное движение тел называются связями. Формализация связей – это описание ограничений на свободное движение в виде математических уравнений.

Если рассматривается плоскопараллельное движение нескольких твердых тел, то конструктивно связь между ними можно задать с помощью хорошо известного в механике простого цилиндрического шарнира, т. к. такое соединение допускает вращательное движение соединенных между собой тел только в одной плоскости. Основная особенность подобной связи состоит в том, что центр шарнира остается неподвижным как для первого, так и для второго из соединенных тел. Рассмотрим, каким образом можно формализовать конструктивную связь в виде цилиндрического шарнира на примере шестизвенной модели спортсмена.

Допустим, что мы имеем свободную систему из шести тел, не соединенных между собой. Как было показано ранее, для каждого из шести звеньев можно ввести координаты, характеризующие его положение на плоскости (рисунок 2.4).

Припишем каждому порядковому номеру звена соответствующий цифровой индекс. Однотипные элементы каждого звена обозначим одной и той же буквой с цифровым индексом, соответствующим номеру звена. Примем следующие обозначения:

$C_1x_1y_1$  – подвижная система координат, связанная с первым телом;

$C_2x_2y_2$  – подвижная система координат, связанная со вторым телом;

$C_3x_3y_3$  – подвижная система координат, связанная с третьим телом;  
 $C_4x_4y_4$  – подвижная система координат, связанная с четвертым телом;  
 $C_5x_5y_5$  – подвижная система координат, связанная с пятым телом;  
 $C_6x_6y_6$  – подвижная система координат, связанная с шестым телом;  
 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  – углы наклона оси абсцисс первой, второй, третьей, четвертой, пятой, шестой подвижных систем координат к оси абсцисс неподвижной системы координат;

$XC_1, XC_2, XC_3, XC_4, XC_5, XC_6$  – координаты по оси  $Ox$  в неподвижной системе координат начала подвижных систем координат соответственно для первого, второго, третьего, четвертого, пятого, шестого звена;

$YC_1, YC_2, YC_3, YC_4, YC_5, YC_6$  – координаты по оси  $Oy$  в неподвижной системе координат начала подвижных систем координат соответственно для первого, второго, третьего, четвертого, пятого, шестого звена.

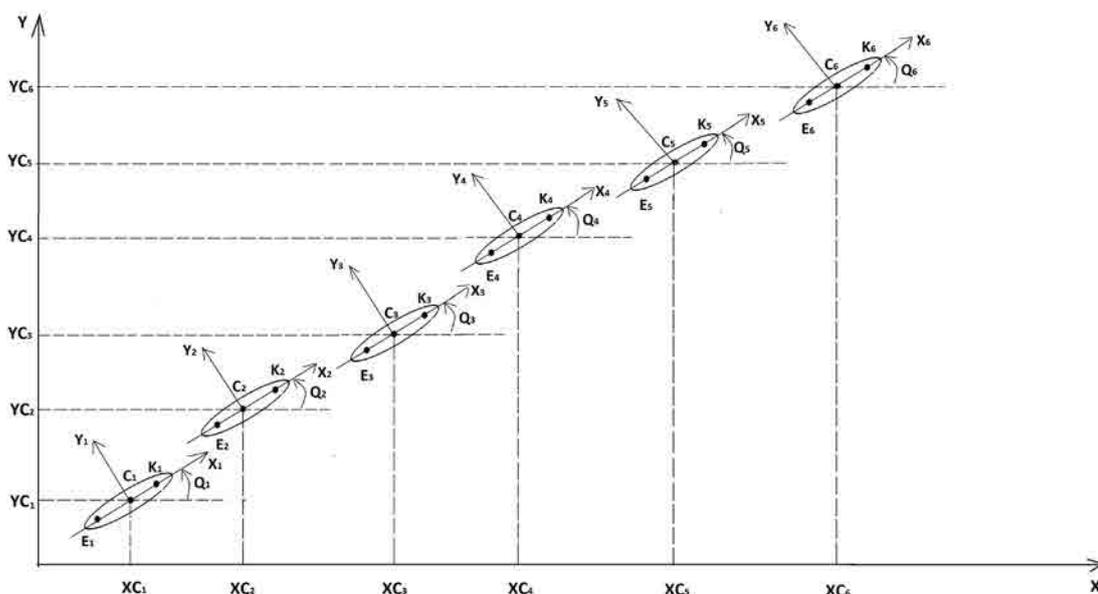


Рисунок 2.4 – Свободная система из шести опорных тел

Причем эти начала подвижных систем координат расположим так, чтобы они совпадали с ЦМ каждого звена.

На осях абсцисс подвижных систем координат отметим для каждого звена по две точки  $E_1, K_1; E_2, K_2; E_3, K_3; E_4, K_4; E_5, K_5; E_6, K_6$ , изображающие оси цилиндрических шарниров. Следовательно, при соединении тел в шестизвенную систему должны совпадать точки  $K_1$  и  $E_2$ ,  $K_2$  и  $E_3$ ,  $K_3$  и  $E_4$ ,  $K_4$  и  $E_5$ ,  $K_5$  и  $E_6$ . Предположим:

$$E_1K_1 = L_1, E_2K_2 = L_2, E_3K_3 = L_3, E_4K_4 = L_4, E_5K_5 = L_5, E_6K_6 = L_6,$$

$$E_1C_1 = S_1, E_2C_2 = S_2, E_3C_3 = S_3, E_4C_4 = S_4, E_5C_5 = S_5, E_6C_6 = S_6.$$

Тогда для рассматриваемой модели из шести звеньев  $Li$  представляет собой длину  $i$ -го звена, а  $Si$  – расстояние от точки соединения звена с предыдущим звеном (для первого звена такой точкой выступает точка на оси вращения, ближайшая к началу неподвижной координат) до ЦМ.

Запишем в развернутой записи координаты отмеченных на звеньях точек до соединения звеньев в связанную систему. Воспользовавшись тем, что по условию оси шарниров расположены на осях подвижных систем координат, выполним ортогональное преобразование для этих точек по формулам (2.6):

$$\begin{aligned} YK_1 &= YC_1 + (L_1 - S_1) \sin Q_1, & YE_1 &= YC_1 - S_1 \sin Q_1, \\ XK_1 &= XC_1 + (L_1 - S_1) \cos Q_1, & XE_1 &= XC_1 - S_1 \cos Q_1; \\ YK_2 &= YC_2 + (L_2 - S_2) \sin Q_2, & YE_2 &= YC_2 - S_2 \sin Q_2, \\ XK_2 &= XC_2 + (L_2 - S_2) \cos Q_2, & XE_2 &= XC_2 - S_2 \cos Q_2; \\ YK_3 &= YC_3 + (L_3 - S_3) \sin Q_3, & YE_3 &= YC_3 - S_3 \sin Q_3, \\ XK_3 &= XC_3 + (L_3 - S_3) \cos Q_3, & XE_3 &= XC_3 - S_3 \cos Q_3; \\ YK_4 &= YC_4 + (L_4 - S_4) \sin Q_4, & YE_4 &= YC_4 - S_4 \sin Q_4, \\ XK_4 &= XC_4 + (L_4 - S_4) \cos Q_4, & XE_4 &= XC_4 - S_4 \cos Q_4; \\ YK_5 &= YC_5 + (L_5 - S_5) \sin Q_5, & YE_5 &= YC_5 - S_5 \sin Q_5, \\ XK_5 &= XC_5 + (L_5 - S_5) \cos Q_5, & XE_5 &= XC_5 - S_5 \cos Q_5; \\ YK_6 &= YC_6 + (L_6 - S_6) \sin Q_6, & YE_6 &= YC_6 - S_6 \sin Q_6, \\ XK_6 &= XC_6 + (L_6 - S_6) \cos Q_6, & XE_6 &= XC_6 - S_6 \cos Q_6. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Мы сознательно записали уравнения для всех шести звеньев в развернутом виде. Громоздкость данных выкладок не вызывает сомнений. Увеличение числа звеньев системы приводит к еще более громоздким уравнениям. Однако таким образом можно проконтролировать корректность вывода каждого уравнения. Кроме того, сложность составления уравнений для многозвенных систем наводят на мысль о том, что при составлении уравнений кинематики необходимо использовать такой метод, который бы обеспечивал автоматизированный вывод уравнений непосредственно ЭВМ, минуя их явную запись на бумаге.

Продemonстрируем данный подход. С этой целью используем в формулах не цифровую, а буквенную индексацию. Например, обозначим через  $j$  номер опорного тела. При этом индекс  $j$  будет изменяться от  $j=1$  до  $j=N$ , где  $N$  – количество опорных тел. В принятых обозначениях уравнения координат осей шарниров опорных тел для  $j$ -го звена системы имеют вид:

$$\begin{aligned} YK_j &= YC_j + (L_j - S_j) \sin Q_j, & YE_j &= YC_j - S_j \sin Q_j, \\ XK_j &= XC_j + (L_j - S_j) \cos Q_j, & XE_j &= XC_j - S_j \cos Q_j, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$j = 1, 2, \dots, N.$

Такой компактный вид приобретают формулы ортогонального преобразования для решаемой задачи. Подставляя в эти формулы значения индекса, определяем координаты осей шарниров  $j$ -го звена. Значение  $j$  при этом может быть любым (1, 2, 3, ..., 20, ...,  $N$ ) и зависит только от числа звеньев рассматриваемой биомеханической системы.

Если совместить точки  $K_1$  и  $E_2$ ,  $K_2$  и  $E_3$ ,  $K_3$  и  $E_4$ ,  $K_4$  и  $E_5$ ,  $K_5$  и  $E_6$  и соединить их с помощью цилиндрических шарниров, то свободная система их шести опорных тел станет связанной. Так как при наложении подобной связи координаты точек  $K_1$  и  $E_2$ ,  $K_2$  и  $E_3$ ,  $K_3$  и  $E_4$ ,  $K_4$  и  $E_5$ ,  $K_5$  и  $E_6$ , являясь осями шарниров, будут попарно равны, то очевидно, что условия равенства координат связанных точек запишутся в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} YC_1 + (L_1 - S_1) \sin Q_1 &= YC_2 - S_2 \sin Q_2, \\ XC_1 + (L_1 - S_1) \cos Q_1 &= XC_2 - S_2 \cos Q_2; \\ YC_2 + (L_2 - S_2) \sin Q_2 &= YC_3 - S_3 \sin Q_3, \\ XC_2 + (L_2 - S_2) \cos Q_2 &= XC_3 - S_3 \cos Q_3; \\ YC_3 + (L_3 - S_3) \sin Q_3 &= YC_4 - S_4 \sin Q_4, \\ XC_3 + (L_3 - S_3) \cos Q_3 &= XC_4 - S_4 \cos Q_4; \\ YC_4 + (L_4 - S_4) \sin Q_4 &= YC_5 - S_5 \sin Q_5, \\ XC_4 + (L_4 - S_4) \cos Q_4 &= XC_5 - S_5 \cos Q_5; \\ YC_5 + (L_5 - S_5) \sin Q_5 &= YC_6 - S_6 \sin Q_6, \\ XC_5 + (L_5 - S_5) \cos Q_5 &= XC_6 - S_6 \cos Q_6, \end{aligned} \quad (2.9)$$

или с использованием буквенных индексных обозначений получим следующую сокращенную запись уравнений (2.9):

$$\begin{aligned}
YC_j + (L_j - S_j) \sin Q_j &= YC_{j+1} - S_{j+1} \sin Q_{j+1}, \\
XC_j + (L_j - S_j) \cos Q_j &= XC_{j+1} - S_{j+1} \cos Q_{j+1}; \\
j &= 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

Как и ранее, индекс  $j$  обозначает номер звена системы связанных тел. Универсальность уравнений (2.10) заключается в том, что они, в отличие от уравнений (2.9), не ограничиваются шестизвенной системой связанных тел, а распространяются на многозвенную систему, состоящую из  $N$ -го количества соединяемых тел. В приведенной записи они удобны для программирования на ЭВМ, т. к. в этом случае отпадает необходимость развернутой записи и при циклически построенной программе всего два уравнения в форме (2.10) охватывают любую  $N$ -звенную неразветвленную биомеханическую систему. В то же время, например, для одиннадцатизвенной модели необходимо записать в развернутой записи уже двадцать уравнений. Как видим, чем больше звеньев в модели, тем более громоздкими становятся уравнения.

Таким образом, конструктивная связь в виде цилиндрических шарниров, наложенная на цепь из шести опорных тел, формализована в форме уравнений (2.9), а при распространении на  $N$ -звенную систему – в форме уравнений (2.10). Уравнения показывают, что если рассматриваемые равенства имеют место в любой момент времени движения системы тел, то эта система связанная. Уравнения, с помощью которых формализуются конструктивные связи, называются уравнениями связи.

## 2.2 Координаты центра масс звеньев тела и суставов

Так как наложение связи ограничивает свободу движения, то возникает возможность с помощью уравнений связи выразить некоторые координаты связанной системы тел через другие. Действительно, система из шести свободных звеньев имеет в плоскостном движении восемнадцать степеней свободы, т. к. каждое звено имеет три степени свободы. При наложении же на свободные звенья связей (2.9) получим связанный шестизвенник (рисунок 2.5).

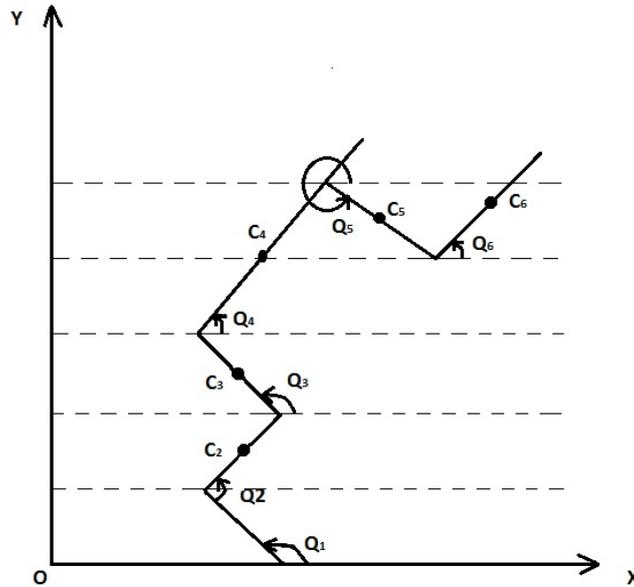


Рисунок 2.5 – Кинематическая схема связанного шестизвенника

Для определения положения шестизвенника достаточно уже не восемнадцать координат звеньев тела, а только восемь. Определим их из уравнений связи (2.10):

$$\begin{aligned}
 YC_2 &= YC_1 + (L_1 - S_1) \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2, \\
 XC_2 &= XC_1 + (L_1 - S_1) \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2; \\
 YC_3 &= YC_1 + (L_1 - S_1) \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3, \\
 XC_3 &= XC_1 + (L_1 - S_1) \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3; \\
 YC_4 &= YC_1 + (L_1 - S_1) \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 S \sin Q_2 + S_4 \sin Q_4, \\
 XC_4 &= XC_1 + (L_1 - S_1) \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + S_4 \cos Q_4; \\
 YC_5 &= YC_1 + (L_1 - S_1) \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 S \sin Q_2 + L_4 \sin Q_4 + S_5 \sin Q_5, \\
 XC_5 &= XC_1 + (L_1 - S_1) \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + L_4 \cos Q_4 + S_5 \cos Q_5; \\
 YC_6 &= YC_1 + (L_1 - S_1) \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 S \sin Q_2 + L_4 \sin Q_4 + L_5 \sin Q_5 + S_6 \sin Q_6, \\
 XC_6 &= XC_1 + (L_1 - S_1) \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + L_4 \cos Q_4 + L_5 \cos Q_5 + S_6 \cos Q_6;
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Из приведенных уравнений видно, что линейные координаты центра масс второго, третьего, четвертого, пятого и шестого звена выражаются через линейные координаты центра масс первого звена и углы наклона звеньев шестизвенника к оси  $Ox$ . Рассматриваемый шестизвенник имеет восемь степеней свободы: вся система может перемещаться поступательно в плоскости  $Oxy$  вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , а также каждое звено вращается в этой плоскости. Восемью степеням свободы соответствуют восемь координат шестизвенника, называемые в механике обобщенными координатами,

по которым и определяется положение шестизвенника на плоскости  $Oxy$ . В данном случае обобщенными координатами являются:

- линейные координаты центра масс первого звена ( $YC_1, XC_1$ );
- углы наклонов звеньев к оси  $Ox$  ( $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ ).

Следовательно, положение свободной шестизвенной системы тел на плоскости определяется заданными значениями линейных координат центра масс первого звена и углами наклона звеньев к оси  $Ox$ .

В уравнениях (2.11) заданы координаты центра масс звеньев, а здесь говорится о шарнирах

Уравнения (2.11) можно распространить и на свободную  $N$ -звенную систему связанных тел, что позволяет исследовать кинематику движений многозвенных биомеханических систем. Используя символьную запись, получим следующие уравнения для определения координат связанной  $N$ -звенной системы тел:

$$\begin{aligned} YC_i &= YC_1 - S_1 \sin Q_1 + \sum_{j=2}^{i-1} L_j \sin Q_j + S_i \sin Q_i; \\ XC_i &= XC_1 - S_1 \cos Q_1 + \sum_{j=2}^{i-1} L_j \cos Q_j + S_i \cos Q_i; \\ i &= 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $i$  – номер звена;  $N$  – количество в связанной системе тел.

Если потребовать, чтобы точка  $E_1$  шестизвенника (рисунок 2.5) совпадала с началом системы координат и закрепить ее там, то тем самым возможность перемещения рассматриваемой системы тел еще больше ограничится. Вместо восьми степеней свободы остается шесть, соответственно числу тел в системе. Уравнения связи, означающие закрепление точки  $E_1$  в начале системы координат, имеют вид:

$$\begin{aligned} XC_1 - S_1 \cos Q_1 &= 0, \\ YC_1 - S_1 \sin Q_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Выразим линейные координаты шестизвенника через угловые. Из уравнения связи (2.13) получим:

$$\begin{aligned} XC_1 &= S_1 \cos Q_1; \\ YC_1 &= S_1 \sin Q_1; \\ XC_2 &= L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2; \\ YC_2 &= L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
XC_3 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3; \\
YC_3 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3; \\
XC_4 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + S_4 \cos Q_4; \\
YC_4 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3 + S_4 \sin Q_4; \\
XC_5 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + L_4 \cos Q_4 + S_5 \cos Q_5; \\
YC_5 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3 + L_4 \sin Q_4 + S_5 \sin Q_5; \\
XC_6 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + L_4 \cos Q_4 + L_5 \cos Q_5 + S_6 \cos Q_6; \\
YC_6 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3 + L_4 \sin Q_4 + L_5 \sin Q_5 + S_6 \sin Q_6.
\end{aligned}$$

Как видно из уравнений, все линейные координаты ЦМ шестизвенника выражены через длины звеньев системы  $L_i$ , расстояния от оси вращения звеньев до начала подвижных систем координат  $S_i$  и тригонометрические функции углов наклона звеньев  $Q_i$  к оси  $Ox$ . Шесть углов  $Q_i$  шестизвенника являются обобщенными координатами. Зная их, можно по уравнениям (2.15) определить все шесть координат точек  $C_i$  в декартовой системе координат. Для  $N$ -звенной системы тел уравнения (2.14) имеют вид:

$$\begin{aligned}
XC_i &= S_i \cos Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j; \\
YC_i &= S_i \sin Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j; \\
i &= 1, 2, 3, \dots, N,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где  $i$  – номер звена;  $N$  – количество звеньев системы.

Так как расположение начальной точки отсчета системы координат можно выбирать произвольно, исходя из простоты определения координат тел, поместим начала подвижных систем координат в ЦМ звеньев модели. Из уравнений связи получим формулы по определению координат ЦМ звеньев тела человека

$$\begin{aligned}
XC_1 &= S_1 \cos Q_1; \\
YC_1 &= S_1 \sin Q_1; \\
XC_2 &= L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2; \\
YC_2 &= L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2; \\
XC_3 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3; \\
YC_3 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3; \\
XC_4 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + S_4 \cos Q_4; \\
YC_4 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3 + S_4 \sin Q_4; \\
XC_5 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + L_4 \cos Q_4 + S_5 \cos Q_5;
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
YC_5 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3 + L_4 \sin Q_4 + S_5 \sin Q_5; \\
XC_6 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + L_4 \cos Q_4 + L_5 \cos Q_5 + S_6 \cos Q_6; \\
YC_6 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3 + L_4 \sin Q_4 + L_5 \sin Q_5 + S_6 \sin Q_6.
\end{aligned}$$

Для  $N$ -звенной модели запишем:

$$\begin{aligned}
XC_i &= S_i \cos Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j; \\
YC_i &= S_i \sin Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j; \\
i &= 1, 2, 3, \dots, N,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где  $i$  – номер звена модели;  $XC_i$  – координата центра масс  $i$ -го звена по оси абсцисс;  $YC_i$  – координата центра масс  $i$ -го звена по оси ординат;  $N$  – количество звеньев модели.

Таким образом, положение центра масс звеньев модели вполне определено, если обобщенные координаты заданы в виде углов, образуемых кинематическими звеньями с осью абсцисс. Аналогичным образом для определения координат осей шарниров поместим начало подвижной системы координат в дистальные оси шарниров: для первой системы координат – шарнир, соединяющий первое звено со вторым; для второй – шарнир, соединяющий второе звено с третьим; для третьей – шарнир, соединяющий третье звено с четвертым; для четвертой – шарнир, соединяющий четвертое звено с пятым и т. д. Из уравнений связи для шестизвенной модели получим следующие выражения, определяющие координаты суставов звеньев тела человека:

$$\begin{aligned}
XO_1 &= L_1 \cos Q_1; \\
YO_1 &= L_1 \sin Q_1; \\
XO_2 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2; \\
YO_2 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2; \\
XO_3 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3; \\
YO_3 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3; \\
XO_4 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + L_4 \cos Q_4; \\
YO_4 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3 + L_4 \sin Q_4; \\
XO_5 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + L_4 \cos Q_4 + L_5 \cos Q_5; \\
YO_5 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3 + L_4 \sin Q_4 + L_5 \sin Q_5; \\
XO_6 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3 + L_4 \cos Q_4 + L_5 \cos Q_5 + L_6 \cos Q_6; \\
YO_6 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3 + L_4 \sin Q_4 + L_5 \sin Q_5 + L_6 \sin Q_6.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Для  $N$ -звенной модели запишем:

$$\begin{aligned} X_{O_i} &= \sum_{j=1}^i L_j \cos Q_j; & Y_{O_i} &= \sum_{j=1}^i L_j \sin Q_j; \\ & i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $X_{O_i}$  – координата дистального шарнира для  $i$ -го звена по оси  $Ox$ ;  $Y_{O_i}$  – координата дистального шарнира для  $i$ -го звена по оси  $Oy$ .

## 2.3 Угловая скорость и ускорение звеньев тела

Угловая скорость определяется значениями первой производной углового перемещения по времени. Функция, описывающая угловое перемещение, является результатом инструментальных измерений и задана табличным способом в виде числовой последовательности обобщенных координат по времени. Например, в качестве исходных данных будет зависимость изменения обобщенных координат шестизвенной модели тела человека от времени при выполнении спортсменом рывка штанги (см. Приложение 1). Каждому номеру видеокadra соответствует определенное значение времени и обобщенных координат. Итак, функция изменения обобщенных координат с течением времени задается не аналитически, а в табличной форме по данным регистрации движений. Следовательно, применить методы аналитического дифференцирования не представляется возможным. В этом случае для определения средней скорости изменения функции на некотором интервале времени можно воспользоваться любым из методов численного дифференцирования [4; 6; 8; 32].

Наиболее простым из них является метод дифференцирования по трем точкам. В результате выполнения промера исследуемого упражнения и считывания обобщенных координат составляется таблица значений углов наклона звеньев тела к оси абсцисс. В качестве аргумента функций обобщенных координат рассматривается время, которое вычисляется по данным частоты видеосъемки. Допустим, видеосъемка проводилась с частотой  $K$  кадров в секунду. Тогда временной интервал между двумя ближайшими кинокадрами ( $\Delta t$ ) равен

$$\Delta t = 1/K. \quad (2.20)$$

Для рассматриваемых табулируемых величин функция значения аргумента в таблице, называемая узлами, образует арифметическую прогрессию, разность которой  $h$  называется шагом таблицы:

$$h = \Delta t = t_i - t_{i+1}, i = 0, 2, 3, \dots, n. \quad (2.21)$$

Первая и вторая производная обобщенных координат по времени, заданных в табличном виде, определяются из симметричных конечно-разностных отношений

$$\dot{Q}_k = (Q_{k+1} - Q_{k-1})/2h, \ddot{Q}_k = (Q_{k+1} - 2Q_k + Q_{k-1})/h^2, \quad (2.22)$$

где  $\dot{Q}_k, \ddot{Q}_k$  – приближенные значения первой и второй производной обобщенных координат по времени и в момент времени  $t = t_i$ . Необходимые пояснения видны из рисунка 2.5.

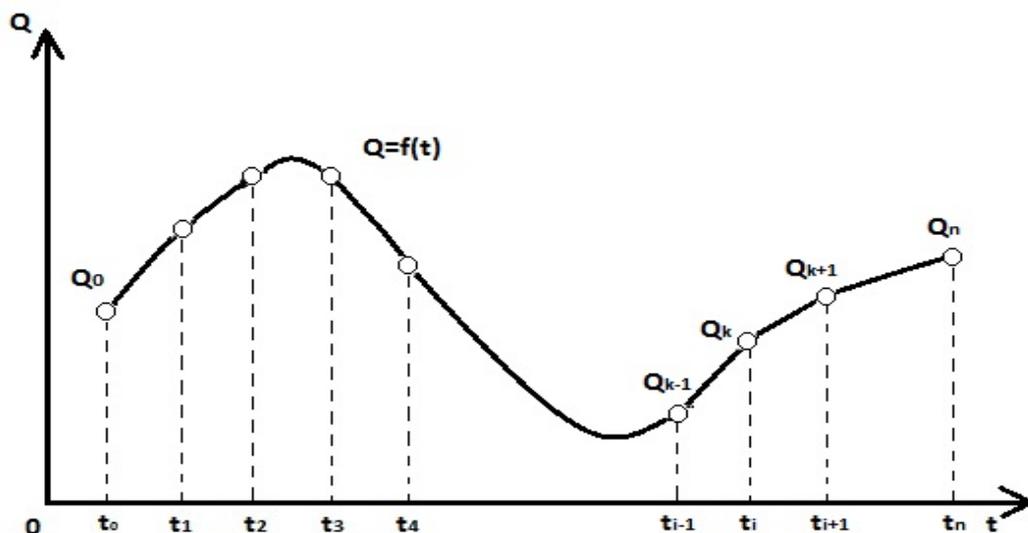


Рисунок 2.5 – Узлы и значения табулируемой функции

Учитывая, что в системе СИ угловая скорость измеряется в рад/с, а значения обобщенных координат по результатам промера определяются в градусах, формулы для определения угловой скорости и ускорения звеньев тела на основании равенств (2.22) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \pi(Q_{i+1} - Q_{i-1})/360h, \\ \ddot{Q}_i &= \pi(Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1})/(180h^2), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $\pi$  – математическая константа, приблизительно равная 3,14159.

Аналогично тому, что значения  $Q_i$  определяют значения обобщенных координат кинематической модели ОДА тела человека, будем считать, что угловая скорость и угловое ускорение звеньев тела определяют обобщенную скорость и обобщенное ускорение звеньев модели.

## **2.4 Линейная скорость и ускорение суставов звеньев тела**

Линейную скорость суставов звеньев тела можно определить из уравнений координат суставов (2.18) и (2.19), продифференцировав их по времени. Учтем, что для любой  $N$ -звенной системы, вообще говоря, определяются координаты  $N+1$  точки ( $N-1$  точек – соединения звеньев, а также координаты начала первого звена и конца последнего). Тогда для автоматизированного вычисления всего массива координат будем вести нумерацию точек с нулевого индекса. В этом случае это будет точка касания биомеханической системы с опорой. Так, для шестизвенной модели тяжелоатлета нулевая точка – это точка касания пальцев стопы с опорой. В случае движения в условиях опоры, располагая в этой точке начало неподвижной системы координат, получаем, что и координаты, и скорость, и ускорение этой точки будут равны нулю.

Для других точек необходимо учесть, что дифференцируемая функция – сложная функция. Действительно, т. к. координаты суставов в прямоугольной системе  $Oxy$  определяются через обобщенные координаты, а они, в свою очередь, являются функцией времени, то для любого из суставов выполняется соотношение:

$$X = F(Q), Q = f(t).$$

А так как функции  $Q$  и  $X$  имеют производные, то по правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$\dot{X} = dX / dt = (\Delta X / \Delta Q)(dQ / dt). \quad (2.24)$$

Воспользуемся приведенным уравнением (2.24) для определения линейной скорости шарниров шестизвенной биомеханической модели. Учтем, что координаты  $(X, Y)$  голеностопных суставов для первого звена определяются из выражений:  $X_1 = L_1 \cos Q_1$ ,  $Y_1 = L_1 \sin Q_1$ .

На основании дифференцирования сложных функций получим:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{dX_1}{dt} = \frac{\Delta(L_1 \cos Q_1)}{\Delta Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt}, \\ \dot{Y}_1 &= \frac{dY_1}{dt} = \frac{\Delta(L_1 \sin Q_1)}{\Delta Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Продифференцируем отдельно правые части уравнений (2.25) по промежуточным аргументам:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(L_1 \cos Q_1)}{\Delta Q_1} &= -L_1 \sin Q_1; \\ \frac{\Delta(L_1 \sin Q_1)}{\Delta Q_1} &= L_1 \cos Q_1; \\ \frac{dQ_1}{dt} &= \dot{Q}_1.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1; \\ \dot{Y}_1 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Следовательно, линейная скорость дистального шарнира первого звена по оси  $Ox(X_1)$  и по оси  $Oy(Y_1)$  определяется на основании значений первой обобщенной координаты ( $Q_1$ ), ее первой производной ( $\dot{Q}_1$ ) и длины звена ( $L_1$ ).

В такой же подробной записи рассмотрим определение линейной скорости дистального шарнира второго звена (коленные суставы). Координаты рассматриваемой точки ( $X_2, Y_2$ ), являющиеся осью шарнира, находятся из выражений:

$$\begin{aligned}X_2 &= L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2; \\ Y_2 &= L_1 \sin Q_1 + L_2 \cos Q_2.\end{aligned}$$

Дифференцируя по времени, с учетом (2.24) находим:

$$\begin{aligned}\dot{X}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = \frac{\Delta(L_1 \cos Q_1)}{\Delta Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} + \frac{\Delta(L_2 \cos Q_2)}{\Delta Q_2} \cdot \frac{dQ_2}{dt}; \\ \dot{Y}_2 &= \frac{dY_2}{dt} = \frac{\Delta(L_1 \sin Q_1)}{\Delta Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} + \frac{\Delta(L_2 \sin Q_2)}{\Delta Q_2} \cdot \frac{dQ_2}{dt}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Дифференцируя правые части уравнений (2.28) по промежуточным аргументам, отметим:

$$\frac{\Delta(L_1 \cos Q_1)}{\Delta Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} = \dot{X}_1;$$

$$\frac{\Delta(L_1 \sin Q_1)}{\Delta Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} = \dot{Y}_1.$$

Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(L_2 \cos Q_2)}{\Delta Q_2} &= -L_2 \sin Q_2; \\ \frac{\Delta(L_2 \sin Q_2)}{\Delta Q_2} &= L_2 \cos Q_2; \\ \frac{dQ_2}{dt} &= \dot{Q}_2. \end{aligned}$$

И в окончательной форме для  $\dot{X}_2$  и  $\dot{Y}_2$  имеем:

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2; \\ \dot{Y}_2 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Аналогичным образом, не приводя подобных выкладок, определим, что линейная скорость дистального шарнира третьего звена по оси  $Ox(X_3)$  и по оси  $Oy(Y_3)$  находится из выражений:

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3; \\ \dot{Y}_3 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Линейная скорость дистального шарнира четвертого звена:

$$\begin{aligned} \dot{X}_4 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3 - L_4 \dot{Q}_4 \sin Q_4; \\ \dot{Y}_4 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3 + L_4 \dot{Q}_4 \cos Q_4. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Линейная скорость дистального шарнира пятого звена:

$$\begin{aligned} \dot{X}_5 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3 - L_4 \dot{Q}_4 \sin Q_4 - L_5 \dot{Q}_5 \sin Q_5; \\ \dot{Y}_5 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3 + L_4 \dot{Q}_4 \cos Q_4 + L_5 \dot{Q}_5 \cos Q_5. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Линейная скорость дистального шарнира четвертого звена шестого звена:

$$\begin{aligned} \dot{X}_6 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3 - L_4 \dot{Q}_4 \sin Q_4 - L_5 \dot{Q}_5 \sin Q_5 - L_6 \dot{Q}_6 \sin Q_6; \\ \dot{Y}_6 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3 + L_4 \dot{Q}_4 \cos Q_4 + L_5 \dot{Q}_5 \cos Q_5 + L_6 \dot{Q}_6 \cos Q_6. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Таким образом, линейные скорости суставов звеньев тела человека  $(\dot{X}_i, \dot{Y}_i)$  можно определить исходя из значений обобщенных координат  $(Q_i)$ , их первых производных по времени  $(\dot{Q}_i)$  и длин звеньев тела  $(L_i)$ . Распространяя уравнения (2.29), (2.30), (2.31), (2.32), (2.33) на  $N$ -звенную модель тела человека, получим следующие выражения для определения линейной скорости дистального шарнира  $i$ -го звена:

$$\dot{X}_i = -\sum_{j=1}^i L_j \dot{Q}_j \sin Q_j; \quad \dot{Y}_i = \sum_{j=1}^i L_j \dot{Q}_j \cos Q_j. \quad (2.34)$$

Для определения линейного ускорения осей шарниров рассматриваемой модели ОДА тела человека необходимо найти вторую производную по времени от значений координат осей шарниров. Первая производная дает выражения (2.34), определяющие линейную скорость осей шарниров в прямоугольной системе координат. Их последующее дифференцирование по времени даст вторую производную или линейное ускорение шарниров. Обозначим, как это и принято в механике, вторую производную через исходную функцию с двумя точками над ней. Тогда для первого звена:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_1 &= (\dot{X})' = \frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1)}{dt}; \\ \ddot{Y}_1 &= (\dot{Y})' = \frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1)}{dt}.\end{aligned}$$

Так как  $L_1$  – постоянная величина, а  $Q_1 = f(t)$  и  $\dot{Q}_1 = F(t)$  – функции, имеющие производные, то по правилу дифференцирования произведения двух функций с константой:

$$\begin{aligned}\frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1)}{dt} &= \frac{d(-L_1\dot{Q}_1)}{dt} \cdot \sin Q_1 + \frac{d(\sin Q_1)}{dt} \cdot (-L_1\dot{Q}_1); \\ \frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1)}{dt} &= \frac{d(L_1\dot{Q}_1)}{dt} \cdot \cos Q_1 + \frac{d(\cos Q_1)}{dt} \cdot (L_1\dot{Q}_1).\end{aligned}$$

Выполнив последовательно дифференцирование для отдельных сомножителей, учитывая правило дифференцирования сложных функций:

$$\begin{aligned}\frac{d(-L_1\dot{Q}_1)}{dt} &= -L_1\ddot{Q}_1; \quad \frac{d(\sin Q_1)}{dt} = \cos Q_1 \cdot \frac{dQ_1}{dt} = \dot{Q}_1 \cdot \cos Q_1; \\ \frac{d(L_1\dot{Q}_1)}{dt} &= L_1\ddot{Q}_1; \quad \frac{d(\cos Q_1)}{dt} = -\sin Q_1 \cdot \frac{dQ_1}{dt} = -\dot{Q}_1 \cdot \sin Q_1.\end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_1 &= -L_1\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \cos Q_1; \\ \ddot{Y}_1 &= L_1\ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \sin Q_1.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Линейное ускорение оси дистального шарнира  $(X_2, Y_2)$  для второго звена имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_2 &= \frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2 \sin Q_2)}{dt}; \\ \ddot{Y}_2 &= \frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3\dot{Q}_3 \cos Q_3)}{dt}.\end{aligned}$$

Правые части уравнений можно представить в виде:

$$\frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2 \sin Q_2)}{dt} = \frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1)}{dt} + \frac{d(-L_2\dot{Q}_2 \sin Q_2)}{dt}$$

$$\frac{d(+L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\dot{Q}_2 \cos Q_2)}{dt} = \frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1)}{dt} + \frac{d(L_2\dot{Q}_2 \cos Q_2)}{dt}.$$

Отметим:

$$\frac{d(-L_1\dot{Q}_1 \sin Q_1)}{dt} = \ddot{X}_1;$$

$$\frac{d(L_1\dot{Q}_1 \cos Q_1)}{dt} = \ddot{Y}_1.$$

Выполнив дифференцирование оставшихся членов правой части уравнений, получим:

$$\ddot{X}_2 = -L_1\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2\dot{Q}_2^2 \cos Q_2;$$

$$\ddot{Y}_2 = L_1\ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + L_2\ddot{Q}_2 \cos Q_2 - L_2\dot{Q}_2^2 \sin Q_2. \quad (2.36)$$

Определяя аналогичным образом линейное ускорение дистального шарнира  $(X_3, Y_3)$  третьего звена, получим уравнение вида:

$$\ddot{X}_3 = -L_1\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - L_3\ddot{Q}_3 \sin Q_3 - L_1\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - L_3\dot{Q}_3^2 \cos Q_3;$$

$$\ddot{Y}_3 = +L_1\ddot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\ddot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3\ddot{Q}_3 \cos Q_3 - L_1\dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - L_3\dot{Q}_3^2 \sin Q_3. \quad (2.37)$$

Линейное уравнение дистального шарнира  $(X_4, Y_4)$  четвертого звена:

$$\ddot{X}_4 = -L_1\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - L_3\ddot{Q}_3 \sin Q_3 -$$

$$- L_3\dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - L_4\ddot{Q}_4 \sin Q_4 - L_4\dot{Q}_4^2 \cos Q_4;$$

$$\ddot{Y}_4 = +L_1\ddot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\ddot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3\ddot{Q}_3 \cos Q_3 + L_4\ddot{Q}_4 \cos Q_4 - L_1\dot{Q}_1^2 \sin Q_1 -$$

$$- L_2\dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - L_3\dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - L_4\dot{Q}_4^2 \sin Q_4. \quad (2.38)$$

Линейное уравнение дистального шарнира  $(X_5, Y_5)$  пятого звена:

$$\ddot{X}_5 = -L_1\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - L_3\ddot{Q}_3 \sin Q_3 -$$

$$- L_3\dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - L_4\ddot{Q}_4 \sin Q_4 - L_4\dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - L_5\ddot{Q}_5 \sin Q_5 - L_5\dot{Q}_5^2 \cos Q_5;$$

$$\ddot{Y}_5 = +L_1\ddot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\ddot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3\ddot{Q}_3 \cos Q_3 + L_4\ddot{Q}_4 \cos Q_4 + L_5\ddot{Q}_5 \cos Q_5 -$$

$$- L_1\dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - L_3\dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - L_4\dot{Q}_4^2 \sin Q_4 - L_5\dot{Q}_5^2 \sin Q_5. \quad (2.39)$$

Линейное уравнение дистального шарнира  $(X_6, Y_6)$  шестого звена:

$$\ddot{X}_6 = -L_1\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - L_3\ddot{Q}_3 \sin Q_3 -$$

$$- L_3\dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - L_4\ddot{Q}_4 \sin Q_4 - L_4\dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - L_5\ddot{Q}_5 \sin Q_5 - L_5\dot{Q}_5^2 \cos Q_5 -$$

$$- L_6\ddot{Q}_6 \sin Q_6 - L_6\dot{Q}_6^2 \cos Q_6;$$

$$\ddot{Y}_6 = +L_1\ddot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\ddot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3\ddot{Q}_3 \cos Q_3 + L_4\ddot{Q}_4 \cos Q_4 + L_5\ddot{Q}_5 \cos Q_5 +$$

$$+ L_6\ddot{Q}_6 \cos Q_6 - L_1\dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - L_3\dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - L_4\dot{Q}_4^2 \sin Q_4 -$$

$$- L_5\dot{Q}_5^2 \sin Q_5 - L_6\dot{Q}_6^2 \sin Q_6. \quad (2.40)$$

Для  $N$ -звенной модели формулы, определяющие линейное ускорение оси дистального шарнира  $i$ -го звена, будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_i &= \sum_{j=1}^i -L_j \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=1}^i L_j \dot{Q}_j^2 \cos Q_j; \\ \ddot{Y}_i &= \sum_{j=1}^i L_j \ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=1}^i L_j \dot{Q}_j^2 \sin Q_j.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Следовательно, для вычисления значений линейного ускорения суставов звеньев тела спортсмена по материалам оптической регистрации движений достаточно знать длины звеньев тела и обобщенные координаты, а затем, вычислив первые и вторые производные от обобщенных координат по времени, определить искомые величины.

## 2.5 Линейная скорость и ускорение центров масс звеньев тела

Линейная скорость и ускорение ЦМ звеньев тела определяется аналогично рассматриваемым кинематическим характеристикам суставов. С этой целью необходимо дважды продифференцировать координаты ЦМ звеньев тела (2.17) по времени. Первая производная является величиной линейной скорости ЦМ звена вдоль соответствующих осей декартовой системы координат, вторая производная – величиной линейного ускорения. После преобразований для шестизвенной модели получим:

$$\begin{aligned}X\dot{C}_1 &= -S_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1; \\ X\dot{C}_2 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - S_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2; \\ X\dot{C}_3 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - S_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3; \\ X\dot{C}_4 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3 - S_4 \dot{Q}_4 \sin Q_4; \\ X\dot{C}_5 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3 - L_4 \dot{Q}_4 \sin Q_4 - S_5 \dot{Q}_5 \sin Q_5; \\ X\dot{C}_6 &= -L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3 - L_4 \dot{Q}_4 \sin Q_4 - L_5 \dot{Q}_5 \sin Q_5 - \\ &\quad - S_6 \dot{Q}_6 \sin Q_6; \\ Y\dot{C}_1 &= S_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1; \\ Y\dot{C}_2 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + S_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2; \\ Y\dot{C}_3 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + S_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3; \\ Y\dot{C}_4 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3 + S_4 \dot{Q}_4 \cos Q_4; \\ Y\dot{C}_5 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3 + L_4 \dot{Q}_4 \cos Q_4 + S_5 \dot{Q}_5 \cos Q_5; \\ Y\dot{C}_6 &= L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3 + L_4 \dot{Q}_4 \cos Q_4 + L_5 \dot{Q}_5 \cos Q_5 + \\ &\quad + S_6 \dot{Q}_6 \cos Q_6.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Для рассматриваемой  $N$ -звенной модели линейная скорость ЦМ звена вдоль оси  $Ox(\dot{X}_{C_i})$  и оси  $Oy(\dot{Y}_{C_i})$  для  $i$ -го звена запишем в виде:

$$\begin{aligned}\dot{X}_{C_i} &= -\sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \sin Q_j - S_i \dot{Q}_i \sin Q_i; \\ \dot{Y}_{C_i} &= -\sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \cos Q_j + S_i \dot{Q}_i \cos Q_i.\end{aligned}\quad (2.43)$$

Для определения линейного ускорения ЦМ звеньев тела спортсмена выполним дифференцирование первой производной по времени от декартовых координат ЦМ звеньев модели по методике, изложенной выше. Опуская промежуточные вычисления, запишем сразу уравнения, связывающие линейные ускорения ЦМ звеньев тела по осям декартовой системы координат с обобщенными координатами рассматриваемой биомеханической системы, обобщенными скоростями, длинами звеньев модели и расстоянием от ЦМ звеньев тела до осей проксимальных шарниров.

Для шестизвенной модели первого звена:

$$\begin{aligned}X\ddot{C}_1 &= -S_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - S_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1; \\ Y\ddot{C}_1 &= S_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - S_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1.\end{aligned}$$

Для шестизвенной модели второго звена:

$$\begin{aligned}X\ddot{C}_2 &= -L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - S_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - S_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2; \\ Y\ddot{C}_2 &= L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + S_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - S_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2.\end{aligned}$$

Для шестизвенной модели третьего звена:

$$\begin{aligned}X\ddot{C}_3 &= -L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3; \\ Y\ddot{C}_3 &= L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 + S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3.\end{aligned}$$

Для шестизвенной модели четвертого звена:

$$\begin{aligned}X\ddot{C}_4 &= -L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - S_4 \ddot{Q}_4 \sin Q_4 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - \\ &- L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - L_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - S_4 \dot{Q}_4^2 \cos Q_4; \\ Y\ddot{C}_4 &= L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 + S_4 \ddot{Q}_4 \cos Q_4 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - \\ &- L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - S_4 \dot{Q}_4^2 \sin Q_4.\end{aligned}$$

Для шестизвенной модели пятого звена:

$$\begin{aligned}X\ddot{C}_5 &= -L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - L_4 \ddot{Q}_4 \sin Q_4 - S_5 \ddot{Q}_5 \sin Q_5 - \\ &- L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - L_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - L_4 \dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - S_5 \dot{Q}_5^2 \cos Q_5; \\ Y\ddot{C}_5 &= L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 + L_4 \ddot{Q}_4 \cos Q_4 + S_5 \ddot{Q}_5 \cos Q_5 - \\ &- L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - L_4 \dot{Q}_4^2 \sin Q_4 - S_5 \dot{Q}_5^2 \sin Q_5.\end{aligned}$$

Для шестизвеной модели шестого звена:

$$\begin{aligned}
 X\ddot{C}_6 &= -L_1\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3\ddot{Q}_3 \sin Q_3 - L_4\ddot{Q}_4 \sin Q_4 - L_5\ddot{Q}_5 \sin Q_5 - \\
 &- S_6\ddot{Q}_6 \sin Q_6 - L_1\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - L_3\dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - L_4\dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - \\
 &- L_5\dot{Q}_5 \cos Q_5 - S_6\dot{Q}_6^2 \cos Q_6; \\
 Y\ddot{C}_6 &= L_1\ddot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2\ddot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3\ddot{Q}_3 \cos Q_3 + L_4\ddot{Q}_4 \cos Q_4 + L_5\ddot{Q}_5 \cos Q_5 + \\
 &+ S_6\ddot{Q}_6 \cos Q_6 - L_1\dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - L_2\dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - L_3\dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - L_4\dot{Q}_4^2 \sin Q_4 - \\
 &- L_5\dot{Q}_5 \sin Q_5 - S_6\dot{Q}_6^2 \sin Q_6.
 \end{aligned}$$

Используя буквенные индексы, можно записать выражения линейного ускорения ЦМ  $i$ -го звена по оси абсцисс ( $\ddot{X}C_i$ ) и ординат ( $\ddot{Y}C_i$ ) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \ddot{X}C_i &= -\sum_{j=1}^{i-1} L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j - \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) - S_i (\ddot{Q}_i \sin Q_i + \dot{Q}_i^2 \cos Q_i); \\
 \ddot{Y}C_i &= \sum_{j=1}^{i-1} L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) + S_i (\ddot{Q}_i \cos Q_i - \dot{Q}_i^2 \sin Q_i).
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Рекуррентная структура уравнений (2.44) позволяет вычислять линейное ускорение ЦМ  $i$ -го звена для  $N$ -звенной модели рассматриваемой биомеханической системы и автоматизировать процесс формирования уравнений для ЭВМ.

## 2.6 Силы реакции опоры и связи в суставах

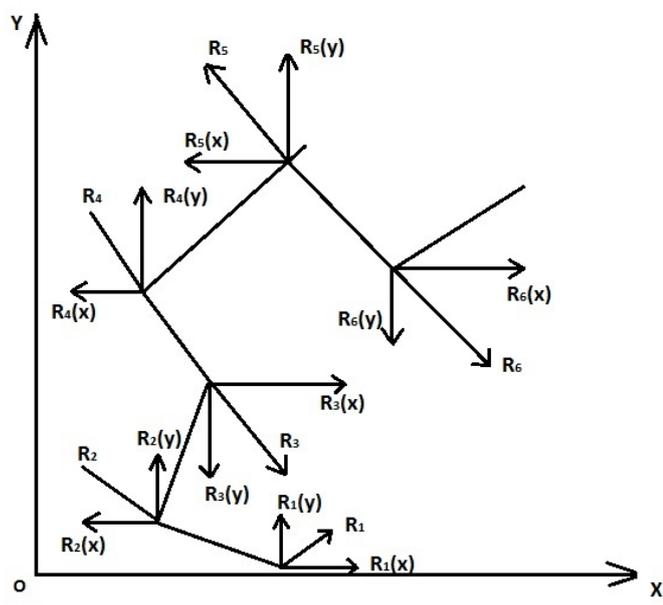
Долгое время в биомеханике тяжелоатлетических упражнений динамические характеристики определяли с использованием инструментальных методов регистрации движения, так, в частности, с использованием тензоплатформы. Опорная реакция регистрировалась как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскости [39]. По вертикальной составляющей опорной реакции можно достаточно четко фиксировать ритм движения атлета, длительность отдельных фаз. По вертикальной и горизонтальной составляющим анализируют направление вектора силы тяжелоатлета, следовательно, и траекторию движения штанги. По горизонтальной можно судить о характере изменения скорости движения снаряда.

Однако практическое применение для определения силы реакции опоры и связи в суставах спортсмена с использованием тензоплощадки на соревнованиях не представляется возможным.

Развитие таких разделов механики, как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, строительная механика и детали машин, дали возможность использовать аналитические методы определения сил, возникающих в различных системах.

Активный поиск расчетных методик начали предпринимать в биомеханике в конце 60-х годов [3]. Однако используемые алгоритмы вычислений с соответствующими программами расчетов не распространялись на  $N$ -звенную модель. В своих исследованиях мы ориентировались на работу [42; 45], где эта задача успешно преодолена.

Для построения расчетной модели сил реакции опоры и связей в суставах воспользуемся уравнениями кинестатики и введем следующие обозначения:  $\ddot{X}_i$  – ускорение центра масс  $i$ -го звена по оси  $Ox$ ;  $\ddot{Y}_i$  – ускорение центра масс  $i$ -го звена по оси  $Oy$ ;  $P_i$  – вес первого звена;  $M_i$  – масса  $i$ -го звена;  $R_i(x)$  – сила реакции связи по оси  $Ox$  в  $i$ -м шарнире модели;  $R_i(y)$  – сила реакции связи по оси  $Oy$  в  $i$ -м шарнире модели;  $R_i$  – результирующий вектор силы реакции связи в  $i$ -м шарнире.



**Рисунок 2.5 – Обозначение в кинематической схеме биомеханической системы, принятые для построения расчетной модели силы реакции опоры и связи в суставах**

В принятых обозначениях для шестизвенной модели можно записать:

$$R_1(x) = m_1 \ddot{X}_1 + m_2 \ddot{X}_2 + m_3 \ddot{X}_3 + m_4 \ddot{X}_4 + m_5 \ddot{X}_5 + m_6 \ddot{X}_6;$$

$$\begin{aligned}
R_2(x) &= m_2 \ddot{X}_2 + m_3 \ddot{X}_3 + m_4 \ddot{X}_4 + m_5 \ddot{X}_5 + m_6 \ddot{X}_6; \\
R_3(x) &= m_3 \ddot{X}_3 + m_4 \ddot{X}_4 + m_5 \ddot{X}_5 + m_6 \ddot{X}_6; \\
R_4(x) &= m_4 \ddot{X}_4 + m_5 \ddot{X}_5 + m_6 \ddot{X}_6; \\
R_5(x) &= m_5 \ddot{X}_5 + m_6 \ddot{X}_6; \\
R_6(x) &= m_6 \ddot{X}_6; \\
R_1(y) &= m_1 \ddot{Y}_1 + m_2 \ddot{Y}_2 + m_3 \ddot{Y}_3 + m_4 \ddot{Y}_4 + m_5 \ddot{Y}_5 + m_6 \ddot{Y}_6 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6; \\
R_2(y) &= m_2 \ddot{Y}_2 + m_3 \ddot{Y}_3 + m_4 \ddot{Y}_4 + m_5 \ddot{Y}_5 + m_6 \ddot{Y}_6 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6; \\
R_3(y) &= m_3 \ddot{Y}_3 + m_4 \ddot{Y}_4 + m_5 \ddot{Y}_5 + m_6 \ddot{Y}_6 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6; \\
R_4(y) &= m_4 \ddot{Y}_4 + m_5 \ddot{Y}_5 + m_6 \ddot{Y}_6 + P_4 + P_5 + P_6; \\
R_5(y) &= m_5 \ddot{Y}_5 + m_6 \ddot{Y}_6 + P_5 + P_6; \\
R_6(y) &= m_6 \ddot{Y}_6 + P_6.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

В принятых обозначениях для  $N$ -звенной модели биомеханической системы «спортсмен – штанга» можно записать:

$$R_i(x) = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{X}_j, \quad R_i(y) = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{Y}_j + \sum_{j=1}^N P_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{2.46}$$

Выразим  $\ddot{X}$ ,  $\ddot{Y}$  согласно уравнениям (2.41) через обобщенные координаты, геометрические характеристики звеньев тела и, подставив в уравнения (2.45), (2.46), выполним необходимые преобразования. Для шестизвенной модели получим:

$$\begin{aligned}
R_1(y) &= C_{11} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + C_{12} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 + C_{13} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 + C_{14} \ddot{Q}_4 \cos Q_4 + \\
&+ C_{15} \ddot{Q}_5 \cos Q_5 + C_{16} \ddot{Q}_6 \cos Q_6 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 - C_{11} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - \\
&- C_{12} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - C_{13} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - C_{14} \dot{Q}_4^2 \sin Q_4 - C_{15} \dot{Q}_5^2 \sin Q_5 - C_{16} \dot{Q}_6^2 \sin Q_6; \\
R_2(y) &= C_{21} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + C_{22} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 + C_{23} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 + C_{24} \ddot{Q}_4 \cos Q_4 + \\
&+ C_{25} \ddot{Q}_5 \cos Q_5 + C_{26} \ddot{Q}_6 \cos Q_6 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 - C_{21} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - \\
&- C_{22} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - C_{23} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - C_{24} \dot{Q}_4^2 \sin Q_4 - C_{25} \dot{Q}_5^2 \sin Q_5 - C_{26} \dot{Q}_6^2 \sin Q_6; \\
R_3(y) &= C_{31} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + C_{32} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 + C_{33} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 + C_{34} \ddot{Q}_4 \cos Q_4 + \\
&+ C_{35} \ddot{Q}_5 \cos Q_5 + C_{36} \ddot{Q}_6 \cos Q_6 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 - C_{31} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - \\
&- C_{32} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - C_{33} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - C_{34} \dot{Q}_4^2 \sin Q_4 - C_{35} \dot{Q}_5^2 \sin Q_5 - C_{36} \dot{Q}_6^2 \sin Q_6; \\
R_4(y) &= C_{41} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + C_{42} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 + C_{43} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 + C_{44} \ddot{Q}_4 \cos Q_4 + \\
&+ C_{45} \ddot{Q}_5 \cos Q_5 + C_{46} \ddot{Q}_6 \cos Q_6 + P_4 + P_5 + P_6 - C_{41} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - C_{42} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - \\
&- C_{43} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - C_{44} \dot{Q}_4^2 \sin Q_4 - C_{45} \dot{Q}_5^2 \sin Q_5 - C_{46} \dot{Q}_6^2 \sin Q_6; \\
R_5(y) &= C_{51} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + C_{52} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 + C_{53} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 + C_{54} \ddot{Q}_4 \cos Q_4 + \\
&+ C_{55} \ddot{Q}_5 \cos Q_5 + C_{56} \ddot{Q}_6 \cos Q_6 + P_5 + P_6 - C_{51} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - C_{52} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - \\
&- C_{53} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - C_{54} \dot{Q}_4^2 \sin Q_4 - C_{55} \dot{Q}_5^2 \sin Q_5 - C_{56} \dot{Q}_6^2 \sin Q_6;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_6(y) &= C_{61}\ddot{Q}_1 \cos Q_1 + C_{62}\ddot{Q}_2 \cos Q_2 + C_{63}\ddot{Q}_3 \cos Q_3 + C_{64}\ddot{Q}_4 \cos Q_4 + \\
&+ C_{65}\ddot{Q}_5 \cos Q_5 + C_{66}\ddot{Q}_6 \cos Q_6 + P_6 - C_{61}\dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - C_{62}\dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - \\
&- C_{63}\dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - C_{64}\dot{Q}_4^2 \sin Q_4 - C_{65}\dot{Q}_5^2 \sin Q_5 - C_{66}\dot{Q}_6^2 \sin Q_6; \\
R_1(x) &= -C_{11}\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{12}\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - C_{13}\ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{14}\ddot{Q}_4 \sin Q_4 - \\
&- C_{15}\ddot{Q}_5 \sin Q_5 - C_{16}\ddot{Q}_6 \cos Q_6 - C_{11}\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{12}\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
&- C_{13}\dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - C_{14}\dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - C_{15}\dot{Q}_5^2 \cos Q_5 - C_{16}\dot{Q}_6^2 \cos Q_6; \\
R_2(x) &= -C_{21}\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{22}\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - C_{23}\ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{24}\ddot{Q}_4 \sin Q_4 - \\
&- C_{25}\ddot{Q}_5 \sin Q_5 - C_{26}\ddot{Q}_6 \sin Q_6 - C_{21}\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{22}\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
&- C_{23}\dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - C_{24}\dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - C_{25}\dot{Q}_5^2 \cos Q_5 - C_{26}\dot{Q}_6^2 \cos Q_6; \\
R_3(x) &= -C_{31}\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{32}\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - C_{33}\ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{34}\ddot{Q}_4 \sin Q_4 - \\
&- C_{35}\ddot{Q}_5 \sin Q_5 - C_{36}\ddot{Q}_6 \sin Q_6 - C_{31}\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{32}\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
&- C_{33}\dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - C_{34}\dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - C_{35}\dot{Q}_5^2 \cos Q_5 - C_{36}\dot{Q}_6^2 \cos Q_6; \\
R_4(x) &= -C_{41}\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{42}\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - C_{43}\ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{44}\ddot{Q}_4 \sin Q_4 - \\
&- C_{45}\ddot{Q}_5 \sin Q_5 - C_{46}\ddot{Q}_6 \sin Q_6 - C_{41}\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{42}\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
&- C_{43}\dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - C_{44}\dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - C_{45}\dot{Q}_5^2 \cos Q_5 - C_{46}\dot{Q}_6^2 \cos Q_6; \\
R_5(x) &= -C_{51}\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{52}\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - C_{53}\ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{54}\ddot{Q}_4 \sin Q_4 - \\
&- C_{55}\ddot{Q}_5 \sin Q_5 - C_{56}\ddot{Q}_6 \sin Q_6 - C_{51}\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{52}\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
&- C_{53}\dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - C_{54}\dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - C_{55}\dot{Q}_5^2 \cos Q_5 - C_{56}\dot{Q}_6^2 \cos Q_6; \\
R_6(x) &= -C_{61}\ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{62}\ddot{Q}_2 \sin Q_2 - C_{63}\ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{64}\ddot{Q}_4 \sin Q_4 - \\
&- C_{65}\ddot{Q}_5 \sin Q_5 - C_{66}\ddot{Q}_6 \sin Q_6 - C_{61}\dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{62}\dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
&- C_{63}\dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - C_{64}\dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - C_{65}\dot{Q}_5^2 \cos Q_5 - C_{66}\dot{Q}_6^2 \cos Q_6;
\end{aligned}$$

где коэффициенты  $C_{ij}$  соответственно равны:

$$C_{11} = m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1 + m_4 L_1 + m_5 L_1 + m_6 L_1;$$

$$C_{12} = m_2 S_2 + m_3 L_2 + m_4 L_2 + m_5 L_2 + m_6 L_2;$$

$$C_{13} = m_3 S_3 + m_4 L_3 + m_5 L_3 + m_6 L_3;$$

$$C_{14} = m_4 S_3 + m_5 L_4 + m_6 L_4;$$

$$C_{15} = m_5 S_5 + m_6 L_6;$$

$$C_{16} = m_6 S_6;$$

$$C_{21} = m_2 L_1 + m_3 L_1 + m_4 L_1 + m_5 L_1 + m_6 L_1;$$

$$C_{22} = m_2 S_2 + m_3 L_2 + m_4 L_2 + m_5 L_2 + m_6 L_2;$$

$$C_{23} = m_3 S_3 + m_4 L_3 + m_5 L_3 + m_6 L_3;$$

$$C_{24} = m_4 S_3 + m_5 L_4 + m_6 L_4;$$

$$C_{25} = m_5 S_5 + m_6 L_6;$$

$$C_{26} = m_6 S_6;$$

$$\begin{aligned}
C_{31} &= m_3 L_1 + m_4 L_1 + m_5 L_1 + m_6 L_1; \\
C_{32} &= m_3 L_2 + m_4 L_2 + m_5 L_2 + m_6 L_2; \\
C_{33} &= m_3 S_3 + m_4 L_3 + m_5 L_3 + m_6 L_3; \\
C_{34} &= m_4 S_3 + m_5 L_4 + m_6 L_4; \\
C_{35} &= m_5 S_5 + m_6 L_6; \\
C_{36} &= m_6 S_6; \\
C_{41} &= m_4 L_1 + m_5 L_1 + m_6 L_1; \\
C_{42} &= m_4 L_2 + m_5 L_2 + m_6 L_2; \\
C_{43} &= m_4 L_3 + m_5 L_3 + m_6 L_3; \\
C_{44} &= m_4 S_3 + m_5 L_4 + m_6 L_4; \\
C_{45} &= m_5 S_5 + m_6 L_6; \\
C_{46} &= m_6 S_6; \\
C_{51} &= m_5 L_1 + m_6 L_1; \\
C_{52} &= m_5 L_2 + m_6 L_2; \\
C_{53} &= m_5 L_3 + m_6 L_3; \\
C_{54} &= m_5 S_5 + m_6 L_4; \\
C_{55} &= m_5 S_5 + m_6 L_6; \\
C_{56} &= m_6 S_6; \\
C_{61} &= m_6 L_1; \\
C_{62} &= m_6 L_2; \\
C_{63} &= m_6 L_3; \\
C_{64} &= m_6 L_4; \\
C_{65} &= m_6 L_5; \\
C_{66} &= m_6 S_6.
\end{aligned}$$

Для рассматриваемой  $N$ -звенной модели уравнения силы реакции опоры и связи в шарнирах для  $i$ -го шарнира имеют вид:

$$\begin{aligned}
R_i(y) &= \sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \cos Q - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{s=1}^N P_s; \\
R_i(x) &= -\sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \sin Q - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

В приведенных уравнениях коэффициенты  $C_{ij}$  неизменны для каждой модели на всей траектории движения, поэтому их достаточно вычислить один раз. В зависимости и от значения индексов  $i$  и  $j$  коэффициенты  $C_{ij}$  равны:

$$C_{ij} = \begin{cases} C_{ij}, & \text{если } i < j \\ m_j S_j + L_j \sum_{s=j+1}^N m_s, & \text{если } i = j \\ L_j \sum_{s=i}^N m_s, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

## 2.7 Кинетическая энергия

Как известно из курса теоретической механики, кинетическая энергия тела, совершающего поступательное плоскопараллельное движение, определяется выражением

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (2.48)$$

где  $T$  – кинетическая энергия тела;  $m$  – масса тела;  $v$  – линейная скорость любой точки тела [9; 29; 69; 93; 86].

Если движущееся тело к тому же совершает и вращательное движение, то кинетическая энергия тела будет определяться его поступательной и вращательной составляющими

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_c \dot{Q}^2}{2}, \quad (2.49)$$

где  $v$  – линейная скорость ЦМ тела;  $J_c$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через ЦМ тела перпендикулярно плоскости движения;  $\dot{Q}$  – угловая скорость тела.

Движение биомеханической системы является сложным движением, т. к. оно включает в себя поступательную и вращательную компоненты, соотносимые к каждому звену рассматриваемой модели. Тогда для рассматриваемой шестизвенной биомеханической системы для каждого из звеньев кинетическая энергия определяется следующим формульным выражением:

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{Q}_1^2}{2} + \frac{m_1 (\dot{X}C_1^2 + \dot{Y}C_1^2)}{2}, \quad (2.50)$$

где  $\dot{X}C_1$  – линейная скорость ЦМ первого звена по оси  $Ox$  декартовой системы координат;

$\dot{Y}C_1$  – линейная скорость центра масс первого звена по оси  $Oy$  декартовой системы координат;

$\dot{Q}_1$  – угловая скорость первого звена;

$J_1$  – центральный момент инерции первого звена;

$m_1$  – масса первого звена;

$T_1$  – кинетическая энергия первого звена.

Аналогично для последующих звеньев:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{J_2 \dot{Q}_2^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{X}C_2^2 + \dot{Y}C_2^2)}{2}, \\ T_3 &= \frac{J_3 \dot{Q}_3^2}{2} + \frac{m_3 (\dot{X}C_3^2 + \dot{Y}C_3^2)}{2}, \\ T_4 &= \frac{J_4 \dot{Q}_4^2}{2} + \frac{m_4 (\dot{X}C_4^2 + \dot{Y}C_4^2)}{2}, \\ T_5 &= \frac{J_5 \dot{Q}_5^2}{2} + \frac{m_5 (\dot{X}C_5^2 + \dot{Y}C_5^2)}{2}, \\ T_6 &= \frac{J_6 \dot{Q}_6^2}{2} + \frac{m_6 (\dot{X}C_6^2 + \dot{Y}C_6^2)}{2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Учитывая, что значения линейных скоростей ЦМ звеньев тела определяются через длины звеньев  $L_i$ , что расстояния от проксимальных суставов до ЦМ звеньев  $S_i$  и обобщенные координаты  $Q_i$  по формульным выражениям (2.43), прибегнув к тригонометрическим тождествам, можно записать уравнения определения кинетической энергии каждого звена биомеханической системы в общем виде

$$T_i = \frac{(J_i + mS_i^2) \dot{Q}_i^2}{2} + m_i \left( \sum_{k=1}^{i-1} L_k \left( \frac{L_k \dot{Q}_k^2}{2} + S_i \dot{Q}_i \dot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) + \sum_{j=k+1}^{i-1} L_j \dot{Q}_k \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_k) \right) \right) \quad (2.52)$$

Так как кинетическая энергия всей биосистемы – сумма кинетических энергий ее звеньев, то кинетическая энергия  $N$ -звенной биомеханической системы равна

$$T = \sum_{i=1}^N T_i, \quad (2.53)$$

где  $T_i$  определяется по формуле (2.52).

## 2.8 Моменты мышечных сил

Причина механического движения тел – силы, которые действуют между телами. Движение  $N$ -звенной биомеханической системы вследствие наложенных суставами связей – это вращательное движение одного звена относительно другого. В этом случае мера воздействия мышечного аппарата тела человека на движение определяется не силой тяги мышц, а моментами этих сил. Если мы сможем определить моменты мышечных сил, которые развивает спортсмен при выполнении соревновательных упражнений, мы сможем оценить, какие мышечные группы лимитируют возможность совершения определенных движений и целенаправленно развивать те группы мышц, которые являются ключевыми в реализации движения.

В уравнения движения, описанные в гл. 1, входят моменты мышечных сил. Следовательно, для зарегистрированного движения появляется возможность аналитического расчета моментов. Запишем формульные выражения вычисления моментов мышечных сил для рассматриваемой шестизвенной биомеханической системы:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^6 A_{1j} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_1) - \sum_{j=1}^6 A_{1j} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_1) + Y_1 \cos \varphi_1 &= M_1 - M_2; \\
 \sum_{j=1}^6 A_{2j} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_2) - \sum_{j=1}^6 A_{2j} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_2) + Y_2 \cos \varphi_2 &= M_2 - M_3; \\
 \sum_{j=1}^6 A_{3j} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_3) - \sum_{j=1}^6 A_{3j} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_3) + Y_3 \cos \varphi_3 &= M_3 - M_4; \\
 \sum_{j=1}^6 A_{4j} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_4) - \sum_{j=1}^6 A_{4j} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_4) + Y_4 \cos \varphi_4 &= M_4 - M_5; \\
 \sum_{j=1}^6 A_{5j} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_5) - \sum_{j=1}^6 A_{5j} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_5) + Y_5 \cos \varphi_5 &= M_5 - M_6; \\
 \sum_{j=1}^6 A_{6j} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_6) - \sum_{j=1}^6 A_{6j} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_6) + Y_6 \cos \varphi_6 &= M_6.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

В этом случае последовательность, начиная с последнего уравнения, в формульном выражении включает не разность моментов, а значение  $M_6$  – момент сил в лучезапястных суставах спортсмена, возможно вычисление моментов сил в каждом шарнире шестизвенной системы.